

130 DE ANI DE ZBUCIUM PENTRU SOLUȚIONAREA PROBLEMEI LUI POINCARÉ DESPRE CENTRU ȘI FOCAR

Academician Mitrofan CIOBANU

Universitatea de Stat din Tiraspol

Tatiana ROTARU

Consiliul Național pentru Acreditare

și Atestare

130 YEARS OF THE EFFORT IN THE SOLVING OF THE POINCARÉ'S CENTER-FOCUS PROBLEM

Summary: It is well known that many mathematical models use differential equation systems and apply the qualitative theory of differential equations, introduced by Poincaré and Liapunov. One of the problems that persists in order to control the behavior of systems of this type, is to distinguish between a focus or a center (the center-focus problem).

The solving of this problem goes through the computation of the Poincaré-Liapunov constants. In the case of polynomial right-hand sides it follows from Hilbert's theorem on the finiteness of bases of polynomial ideals that in this sequence only finitely many are essential and that the remaining ones are consequences of them. Hence, this problem is divided in two parts: in the first, to estimate the number of essential constants; in the second, to determine the minimal upper border of the indexes of a complete system of essential constants. The first part is called the weak center-focus problem.

The problem of estimation the maximal number of algebraically independent essential constants is called the generalized center-focus problem. Recently M. N. Popa and V. V. Pricop have solved the generalized center-focus problem. The present article contains: some moments related to the history of the center-focus problem; the contribution of the Sibirschi's school in the solving of the center-focus problem; methodological aspects of the Popa – Pricop solution of the generalized center-focus problem.

The problem of the estimation of the minimal upper border of the indexes of a complete system of algebraically independent essential constants is open. Another open problem consists on determining what differential systems are integrable.

Keywords: Poincaré-Liapunov constants, center-focus problem, generalized center-focus problem.

1. Din istoria matematicii

A vorbi despre matematică sau despre matematicieni este o provocare cu riscul de a rămâne neînțeleas sau chiar respins din start. Au apus vremurile când disciplinele de cercetare nu erau constituite strict, iar dialogul dintre reprezentanții lor era un mod normal de existență și colaborare. Dar secolul al XIX-lea a adus civilizației umane mai multe descoperiri surprinzătoare. O mare parte dintre ele constituie rezultatul analizei logice a fenomenelor sau a celei matematice: Gauss a descoperit prin calculul asteroizii Ceres, Palass, Vesta, Iunona; Galle, de asemenea, în baza calculelor a identificat planeta Neptun (1846); Mendeleev, pornind de la masa atomică, a sistematizat elementele chimice și a anticipat existența multora noi; Schliemann, în baza descrierilor lui Homer, a determinat locul amplasării Troiei etc. Anume cercetările matematice au contribuit la rezolvarea unui șir de probleme, care au frământat mințile savanților timp de aproape 2500 de ani, începând cu Platon, Aristotel, Euclid, Arhimede, precum și la crearea a noi discipline în domeniu.

La începutul secolului al XX-lea matematica a proliferat într-atât, încât ea s-a transformat, vorbind la figurat, într-un Regat al Universului Științei, deși acest cuvânt din greacă înseamnă „învățare”, „studiu”, „știință”. Considerăm incontestabil faptul că știința este și o artă, o artă a profunzimii și a forței cugetului uman. Puțin mai înainte, în sec. al XIX-lea, genialul matematician francez Henri Poincaré (1854-1912) a creat noi domenii de cercetare, ca topologia, teoria calitativă a sistemelor dinamice etc.

Dezvoltarea matematicii în România a avut legături adânci cu opera și activitatea lui Poincaré: a fost membru al Comisiei la susținere a tezelor de doctorat la mulți matematicieni și fizicieni de performanță ca Nicolae Coculescu, Gheorghe Țițeica, Anton Davidoglu, Dragomir Hurmuzescu, Dimitrie Pompeiu, Constantin Nicolau și alții. Prin metode cantitative, Spiru Haret demonstrase instabilitatea Sistemului Solar. Abordarea calitativă, precum și într-un cadru mult mai extins, l-a condus pe Poincaré la confirmarea acestui fapt. Rezultatele teoriei KAM (Kolmogorov - Arnold - Moser) au arătat că Sistemul Solar se află într-o stare de *stabilitate relativă*. Ca rezultat al acestei cooperări fructuoase cu cercetătorii români, Henri Poincaré a fost distins cu titlurile onorifice de Doctor Honoris Causa al Universității Kolosvar (Cluj) și de membru de onoare al Academiei Române (1909).

Henri Poincaré [16] a formulat o serie de probleme, soluționarea cărora determină dezvoltarea în

continuare a științei. O știre senzațională, în acest sens, a constituit în primii ani ai acestui mileniu soluționarea Conjecturei Poincaré de către enigmaticul matematician rus Grigori Perelman. Demonstrația lui din anul 2002 s-a situat pe primul loc în topul celor mai importante descoperiri științifice din ultimele decenii. Conjectura lui Poincaré sau ipoteza lui Poincaré, prima dată enunțată de Poincaré în 1904, afirmă că dacă S este o varietate 3-dimensională compactă (o suprafață 3-dimensională închisă, mărginită sau fără margini, scufundată într-un spațiu 4-dimensional), în care orice cerc poate fi deformat continuu până ce devine un punct, atunci acest spațiu S este echivalent, din punct de vedere topologic (homeomorf), cu o sferă 3-dimensională. Rezolvarea unei probleme mari generează formularea a altor noi probleme, care determină dezvoltarea ulterioară a științei. Există speranța că acest faimos rezultat al lui Perelman va contribui la rezolvarea problemei clasificării varietăților tridimensionale – o altă problemă importantă enunțată de Poincaré în 1904, și, în special, la studiul Universului.

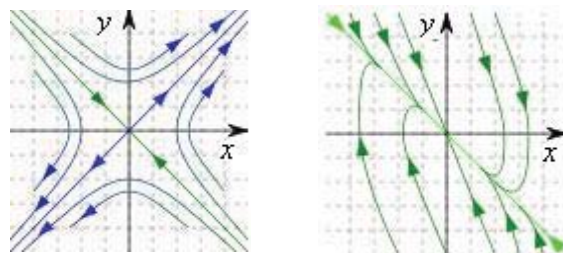
Una din problemele faimoase ale teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale este *Problema Centrului și Focarului*, formulată de Poincaré cu 130 de ani în urmă (vezi [15]). În anii 1881-1899 el a studiat soluțiile periodice și asimptotice ale ecuațiilor diferențiale, a elaborat metoda parametrului mic, metoda punctelor fixe, metoda invariantilor integrali, devenite procedee clasice ale cercetărilor nu numai în mecanică și astronomie, dar și în fizica statică și mecanica cuantică. Lucrând asupra problemelor mecanicii cerești, dânsul a pus concomitent fundamentul unei științe noi – topologia, numită de el „Analysis situs” („Analiza pozițiilor”).

2. Problema Centrului și Focarului

Fie

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y) \quad (1)$$

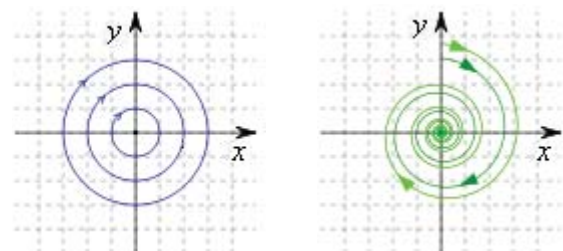
un sistem autonom de ecuații diferențiale. Admitem că funcțiile $X(x, y)$ și $Y(x, y)$ sunt analitice. Soluțiile acestui sistem de ecuații se numesc curbe integrale. Teoria calitativă are ca punct de plecare teoria stabilității și problema mișcării a trei și mai multe corpuri din mecanica cerească. Henri Poincaré a arătat că și în cazul, în care ecuația diferențială nu se rezolvă explicit, se poate de determinat caracterul comportării soluțiilor (curbelor integrale) și a propus o clasificare a punctelor singulare ale soluțiilor: șa, focar, centru, nod.



a) șa

b) nod

Fig. 1. Puncte singulare de speța întâi



c) centru

d) focar

Fig. 2. Puncte singulare de speța a doua

Este cunoscut că dacă rădăcinile ecuației caracteristice a punctului singular $O(0,0)$ sunt imaginare, atunci el poate fi centru sau focar (punct singular de speța a doua). În cazul centrului, curbele integrale din apropierea punctului singular sunt curbe închise ce înconjoară acest punct, iar în cazul focarului sunt spirale ce înconjoară punctul singular. **Problema Centrului și Focarului** constă în *determinarea condițiilor* care asigură că punctul singular este un centru. În cazul general problema centrului este algebric irezolvabilă [9, 1, 19].

Problema Centrului și Focarului are legături profunde cu **Problema a 16-ea** a lui David Hilbert. În anul 1900, la cel de al doilea Congres Internațional al Matematicienilor, Hilbert a formulat 23 de probleme importante pentru dezvoltarea în continuare a științei. Problema a 16-ea, care rămâne nerezolvată până în prezent, se referea la curbe și suprafețe algebrice. Astăzi problema respectivă este divizată în două părți ce țin de diferite domenii. Numărul maximal de ramuri închise al unei curbe algebrice de ordinul n a fost stabilit de Harnack. Prima parte a Problemei a 16-ea constă în determinarea poziției acestor ramuri una față de alta. Pentru $n = 6$ se obțin 11 ramuri și Hilbert a presupus că există o ramură care conține o altă ramură, iar în exteriorul ei se află celelalte nouă ramuri sau invers. Însă în anul 1970 D. A. Gudkov a determinat că există cazuri când în exteriorul și interiorul curbei se află câte cinci ramuri. Acest fapt a demonstrat că prima parte a problemei este cu mult mai complicată. Diverse proprietăți și exemple neordina-

re au fost descrise de I. G. Petrovski, O. A. Oleinic, V. I. Arnold, V. A. Rohlin, O. Ya. Viro și alții. Această parte a problemei se referă în prezent la geometria algebrică (vezi [15]).

În a doua parte a Problemei a 16-ea, care rămâne, de asemenea, nerezolvată și completează Problema Centrului și Focarului, pentru un câmp vectorial polinomial de ordinul n se cere de determinat marginea superioară $H(n)$ a numărului de cicluri și poziția relativă a lor. Este cunoscut faptul că numărul de cicluri de limită întotdeauna este finit. Numărul $H(n)$ se numește numărul lui Hilbert.

Cercetările Problemei a 16-ea au decurs destul de dramatic. În anul 1923 Henri Dulac [5] a propus o demonstrație cum că numărul $H(n, \nu)$ este finit pentru orice câmp vectorial polinomial ν de ordinul n . În anul 1955 Ivan G. Petrovski și Evgenii M. Landis au anunțat despre soluționarea completă a părții a doua a Problemei a 16-ea, dar în anul 1960 s-a determinat totuși că demonstrarea lor conține lacune serioase. O mare surpriză a constituit și lucrarea lui Yulii Ilyashenko din anul 1981, în care s-a stabilit că și lucrarea lui Dulac din 1923 conține lacune, care cu mari eforturi au fost înlăturate peste 10 ani de Yulii Ilyashenko și Jean Ecalle (vezi [6, 8, 15]).

Aceste rezultate au impulsionat cercetările câmpurilor vectoriale polinomiale ν de ordinul n . Construind compactificarea Poincaré a planului și proiecția sferei pe planul proiectiv se efectuează reducția la studiul câmpurilor vectoriale pe sferă. În acest caz a doua parte a Problemei a 16-ea este un caz particular al **Problemei de Finitudine Globală**: *În orice familie analitic finit-parametrizată de câmpuri vectoriale analitice pe sferă cu spațiul de parametri B compact (din spațiul Euclidian k -dimensional) numărul $H(n, p)$ de cicluri limită este uniform mărginit pentru toate valorile p a parametrului din B .* Această problemă a fost formulată de Yu. Ilyashenko în 1994 și poartă numele de **Problema Hilbert – Arnold** (vezi [8]). În anul 1986 V. I. Arnold (vezi [1, 8]), pentru un câmp vectorial neted definit pe o sferă, a introdus noțiunile de policiclu, numărul de bifurcație $B(k)$ de ciclare maximală a policiclului netrivial al câmpului, de punct singular elementar, de policiclu elementar și de numărul de bifurcație elementar $E(k)$ de ciclare maximală a policiclului elementar netrivial. Astfel, a fost formulată **Problema locală a lui Hilbert – Arnold**: *de demonstrat că numărul $B(k)$ este finit și de estimat de sus acest număr.* Rezolvarea pozitivă a problemei globale este o consecință a răspunsului pozitiv la problema locală. Este stabilit că $B(1) = 1$ și $B(2) = 2$. Pentru $B(3)$ există pentru moment numai o strategie de cal-

culare. V. Yu. Kaloshin a stabilit că $E(k) < 25k^2$ (vezi [8, 9, 10, 11]).

Examinăm cazul când funcțiile $X(x, y)$ și $Y(x, y)$ sunt polinoame. Pentru ca Problema Centrului și Focarului să fie algebric rezolubilă este necesar ca părțile liniare ale polinoamelor $X(x, y)$ și $Y(x, y)$ să nu fie nule. În aceste condiții sistemul (1) poate fi scris la forma

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^{\ell} P_{m_i}(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^{\ell} Q_{m_i}(x, y), \quad (2)$$

unde P_{m_i} și Q_{m_i} sunt polinoame omogene de gradul $m_i \geq 1$ în raport cu x și y , iar $m_0 = 1$. Mulțimea $1, m_1, m_2, \dots, m_{\ell}$ constă dintr-un număr finit ($\ell < \infty$) de numere naturale diferite. Coeficienții și variabilele polinoamelor P_{m_i} și Q_{m_i} primesc valori din câmpul numerelor reale R . Sistemul de tipul (2) îl vom nota prin $s(1, m_1, m_2, \dots, m_{\ell})$.

Rezultate fundamentale la această problemă au fost obținute de **A. M. Lyapunov** (1857-1918) [12]. Henri Poincaré și Alexandr Lyapunov au pus bazele *metodelor teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale*.

După cum s-a stabilit, condițiile centrului ne reprezintă egalitatea cu zero a unui șir infinit de polinoame (mărimi focale, constante Lyapunov, constante Poincaré-Lyapunov)

$$L_1, L_2, \dots, L_k, \dots \quad (3)$$

ce depind de coeficienții polinoamelor din părțile drepte ale sistemului $s(1, m_1, m_2, \dots, m_{\ell})$.

Dacă cel puțin una din aceste mărimi (3) este diferită de zero, atunci originea de coordonate pentru sistemul $s(1, m_1, m_2, \dots, m_{\ell})$ este focar. Aceste condiții sunt necesare și suficiente.

Din teorema lui David Hilbert despre finitudinea bazei idealelor polinomiale rezultă că *condițiile esențiale*, ce exprimă egalitatea cu zero a șirului infinit de polinoame (3), constă dintr-un număr finit de polinoame, iar celelalte sunt o urmare a lor.

Luând în considerație acest rezultat, problema Centrului și Focarului poate fi enunțată în felul următor: *ce număr finit ω de polinoame (condiții esențiale ale centrului)*

$$L_{n_1}, L_{n_2}, \dots, L_{n_{\omega}} \quad (n_i \in \{1, 2, \dots, k, \dots\}; \quad i = 1, \omega; \quad \omega < \infty) \quad (4)$$

sunt necesare pentru ca egalitatea lor cu zero să anuleze celelalte polinoame din (3) ?

Prin urmare, Problema Centrului și Focarului constă din două părți. *Prima parte* vizează estimarea numerică de sus a numărului ω de condiții esențiale. *A doua parte* – determinarea mulțimii $\Omega = \{n_1, n_2, \dots, n_{\omega}\}$ de indici ai condițiilor esențiale.

Vom considera prima parte ca *Problema slabă* a Centrului și Focarului.

Problema generalizată a Centrului și Focarului constă în estimarea de sus a numărului λ de elemente algebric independente din $\Pi = \{L_i; i \in \Omega\}$.

Problema determinării condițiilor esențiale (4) ale centrului cu numărul ω este o problemă foarte complicată și este rezolvată complet doar pentru sistemele $s(1,2)$ și $s(1,3)$, pentru care respectiv avem $\omega = 3, 5$ (vezi [3, 23]).

Până astăzi nu este cunoscut numărul ω pentru sistemul $s(1,2,3)$, ce îl putem considera, de asemenea, un sistem nu atât de complicat.

Există doar o ipoteză a prof. H. Zolâdek (Polonia), ce se bazează mai mult pe intuiție, că pentru sistemul $s(1,2,3)$ numărul $\omega \leq 13$. Această ipoteză nu este contestată până în prezent, însă există o lucrare recentă din 2010, în care se confirmă că 12 mărimi focale nu sunt îndeajuns pentru rezolvarea problemei Centrului și Focarului la sistemul $s(1,2,3)$ în cazul complex [7].

Metoda algebrelor Lie și a algebrelor graduate a lui Sibirschi permite rezolvarea Problemei generalizate a Centrului și Focarului.

3. Între centru și focar ... frământări de peste un secol

Până a trece la subiectul de bază – Problema Centrului și Focarului – vom aminti de câteva teorii care, într-un fel sau altul, au contribuit la apariția și formularea acesteia acum 130 de ani de către Poincaré și găsirea unei soluții (până când la forma generalizată) a ei abia acum, la Chișinău. De la **Artur Cayley** (1821-1895), Cambridge, Anglia, a pornit *teoria invariantilor*. **Marius Sophus Lie** (1842-1899), Christiania, Norvegia, a elaborat *teoria grupurilor și algebrelor Lie* – un nou gen de structură algebrică ce-i poartă numele – ambele fiind aplicate în diverse domenii ale științelor reale, inclusiv în geometrie și în studiul ecuațiilor diferențiale. **Constantin Sibirschi** (1928-1990), Chișinău, Republica Moldova, a fondat *teoria invariantilor algebrici*, care este aplicată în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, neștiind că aceasta are ieșire la teoria lui Lie.

Dar cine și cum a stabilit această legătură? În anul 1976, acad. Constantin Sibirschi, șef de laborator la Institutul de Matematică și Informatică al AȘM, fondator al școlii științifice de ecuații diferențiale din Republica Moldova, a publicat monografia *Invarianții algebrici ai ecuațiilor diferențiale și matricelor* (vezi [21]), care a avut o rezonanță mare în lumea matematicienilor. Peste trei ani, în 1979, profesorul american **C.S. Coleman** a publicat o recen-

zie la această lucrare științifică, în care a specificat că *ea este scrisă în spiritul cercetărilor matematicianului norvegian Marius Sophus Lie*. În ce constau aceste investigații, nu era clar pentru matematicienii din Moldova. Cunoșteau doar că norvegianul a creat o direcție nouă în cercetările matematice, dar care este tangența dintre ea și cercetările din Moldova și cum ar putea fi aplicate metodele lui Lie în practică, nu se știa.

Acum patru ani, unul din subsemnații acestei lucrări (jurnalista T.Rotaru – n.r.) a redactat și pregătit pentru tipar un articol de memorii, intitulat *O viață zbuciumată între centru și focar*, semnat de Ana Sibirschi, soția regretatului matematician, acad. Constantin Sibirschi (vezi [20]). Atunci, din prima sursă, am aflat despre frământările și căutările unui savant în identificarea adevărului științific. La acel moment, fondatorul școlii științifice moldovenești în domeniul teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale era preocupat de elaborarea teoriei invariantilor algebrici pentru aplicarea lor la rezolvarea problemelor ce țin de *teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*. Teoria respectivă, elaborată de Poincaré în anii 1880-1882, permite să se determine caracterul comportării soluțiilor (curbelor integrale) și în cazul în care ecuația diferențială nu se rezolvă explicit. După cum a fost menționat mai sus, Poincaré a propus o clasificare a punctelor singulare ale soluțiilor. Dar problema deosebirii acestora, fără cunoașterea explicită a soluțiilor, s-a dovedit a fi foarte complicată.

Amintindu-și de acele vremuri, prof. Mihail Popa a mărturisit: „N-am crezut niciodată că mă voi ocupa cândva de problema Centrului și a Focarului. Dar după ce am stabilit legătura între algebrele Lie și algebrele graduate ale invariantilor lui Sibirschi, am înțeles că se deschide calea spre soluționarea acestei probleme, formulată de Henri Poincaré cu 130 de ani în urmă.”

Problemei Centrului și Focarului i-au fost consacrate până acum mii de lucrări în diverse centre științifice ale lumii (Franța, Rusia, Belarus, China, Marea Britanie, Canada, SUA etc.). Doar în Republica Moldova numărul acestora se apropie de 100. La diferite etape, mai mulți elevi ai lui Sibirschi au examinat diverse aspecte ale problemei date (m.c. Nicolae Vulpe, prof. Alexandru Șuba, dr. Iurie Calin, dr. Valeriu Baltag, dr. Dumitru Cozma s.a.), obținând rezultate valoroase. Unele aspecte ale dezvoltării matematicii în Republica Moldova sunt descrise în cartea [5].

Matematicianul Mihail Popa a mers pe propria cale, pornind de la stabilirea legăturii între algebrele Lie și algebrele graduate ale invariantilor lui Si-

birschi – instrument de lucru în căutările ulterioare. În contextul dat, vom face unele precizări: calea de rezolvare a Problemei Centrului și Focarului a fost inițial trasată de matematicianul rus Alexandru Lyapunov. Însă aplicând metoda acestuia chiar și pentru cele mai simple sisteme diferențiale, te confrunți cu niște calcule enorme, ce nu puteau fi depășite nici cu ajutorul celor mai moderne calculatoare. De aceea cercetătorul moldovean a luat ca bază Problema generalizată a Centrului și Focarului pentru sistemele diferențiale menționate, evitând calcularea mărimilor Poincaré-Lyapunov pentru fiecare sistem în parte. Șirul (3) cu mărimile Poincaré-Lyapunov a fost substituit cu un șir de algebre Lie și un șir de subspații liniare ale unei algebre graduate ale invariantilor lui Sibirschi. La estimarea numărului maximal de mărimi focale algebric independente a aplicat aceste algebre. Ca rezultat, s-a obținut o estimatie numerică finită pentru mărimi focale algebric independente ce participă la rezolvarea problemei Centrului și Focarului pentru orice sistem de ecuații diferențiale polinomiale (2). O analiză a activității profesorului Mihail Popa se conține în articolul [4] recent publicat.

4. Algebra Lie a grupului $GL(2, R)$ și algebra graduată a comitanților și invariantilor unimodulari ai sistemului $s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell)$

Este cunoscut că sistemul $s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell)$ admite grupul $GL(2, R)$, căruia îi corespunde algebra reductivă Lie $L_4 = \langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$ a operatorilor de reprezentare liniară a grupului dat în spațiul variabilelor de fază și coeficienților polinoamelor acestui sistem [17].

Această algebră generează o algebră graduată de polinoame invariante a lui Sibirschi în raport cu grupul unimodular $SL(2, R) \subset GL(2, R)$ [16], pe care o vom scrie

$$S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell} = \sum_{(d)} S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}^{(d)}, \quad (5)$$

unde (d) se numește tipul spațiului $S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}^{(d)}$ și are forma [22, 17]

$$(d) = (\delta, d_0, d_1, d_2, \dots, d_\ell) \quad (6)$$

iar

$$S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}^{(d)} \quad (7)$$

este un spațiu liniar, finit-dimensional de polinoame invariante (comitanți și invarianti) omogene de gradul δ în raport cu variabilele de fază x, y și de gradul d_i în raport cu coeficienții polinoamelor P_{m_i} și Q_{m_i} ($i = \overline{0, \ell}$) respectivi ai sistemului (2).

Este cunoscut că această algebră este finit determinată.

Cu ajutorul algebrei Lie L_4 se poate arăta că numărul maximal de elemente algebric independente (dimensiunea lui Krull) a algebrei $S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}$ [18] este

$$\rho(S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}) = 2 \left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell \right) + 3. \quad (8)$$

Este evident că dacă dimensiunea lui Krull a algebrei $S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}$ este $(S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell})$, atunci pentru orice varietate invariantă $V = \{i_1 = 0, i_2 < 0; i_1, i_2 \in S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}\}$, unde i_1 este urma matricei părții liniare a sistemului (2), (i_2 nu influențează asupra varietății [18]) în această algebră $S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}$ se vor găsi nu mai mult decât $\rho(S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell})$ elemente algebric independente.

5. Rezolvarea Problemei generalizate a Centrului și Focarului

Să ne amintim că mărimile focale ale sistemului $s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell)$, ce are în originea de coordonate punct singular de speța a doua (centru sau focar), formează un șir infinit de polinoame de la coeficienții acestui sistem ce a fost scris sub forma (3).

Se poate arăta că fiecărei mărimi focale L_k ($k = \overline{1, \infty}$) i se poate pune în corespondență spații liniare finit-dimensionale de polinoame invariante (comitanți) unimodulari [17]

$$S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}^{(d^{(k)})} \quad (9)$$

unde

$$(d^{(k)}) = (\delta^{(k)}, d_0^{(k)}, d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_\ell^{(k)}) \quad (10)$$

este tipul spațiilor (9) ce a fost definit mai sus.

Pentru spațiile (9) este caracteristic următorul fapt [18]: ele conțin cel puțin un polinom omogen de x și y (comitant), în care coeficienții sunt niște mărimi, nominalizate *pseudo-mărimile focale generalizate*. Ele se caracterizează prin aceea că pe varietatea invariantă de mai sus $V = \{i_1 = 0, i_2 < 0; i_1, i_2 \in S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}\}$, unele din aceste pseudo-mărimi focale, făcând abstracție de o constantă numerică, pleacă în mărirea focală respectivă L_k , iar celelalte se duc în zero. Polinoamele invariante i_1 și i_2 nu depind de variabilele x și y , iar i_j , pe care îl vom numi *pseudo-mărirea focală nulă*, aparține spațiului $S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}^{(0, 1, 0, 0, \dots, 0)}$. În așa fel putem scrie un șir de spații $R = S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}^{(0, 0, 0, 0, \dots, 0)}, S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}^{(0, 1, 0, 0, \dots, 0)}, \dots, S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}^{(\delta^{(k)}, d_0^{(k)}, d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_\ell^{(k)})}, \dots$ din $S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}$ cu ajutorul cărora formăm o subalgebră graduată $S'_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}$, a algebrei $S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}$, i. e. $S'_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell} \subset S_{1, m_1, m_2, \dots, m_\ell}$ (vezi [18]). Din incluziunea dată rezultă că între

dimensiunile lui Krull ale acestor algebre avem următoarea inegalitate $\rho(S'_{1,m_1,m_2,\dots,m_\ell}) \leq \rho(S_{1,m_1,m_2,\dots,m_\ell})$. Cu ajutorul acestei inegalități și a formulei de mai sus pentru dimensiunea lui Krull $\rho(S_{1,m_1,m_2,\dots,m_\ell})$ obținem:

Lema 1 [18]. *Numărul maximal de invarianti și comitanți, ce conțin ca coeficienți pseudo-mărimile focale nule și cele generalizate algebric independenți ai sistemului $s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell)$ nu întrece hotarul numeric de sus $2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 3$.*

Luând în considerație proprietățile acestor comitanți din algebra $S'_{1,m_1,m_2,\dots,m_\ell}$, ce sunt legate de mărimile focale pe varietatea $V = \{i_1 = 0, i_2 < 0; i_1, i_2 \in S_{1,m_1,m_2,\dots,m_\ell}\}$ și Lema 1, obținem:

Teorema 1. [18] *Numărul maximal de mărimi focale algebric independente λ ale sistemului $s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell)$ pe varietatea $V = \{i_1 = 0, i_2 < 0; i_1, i_2 \in S_{1,m_1,m_2,\dots,m_\ell}\}$, ce participă la rezolvarea Problemei Centrului și Focarului, nu întrece hotarul numeric de sus $2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 3$.*

Amintim că pentru sistemele $s(1,2)$ și $s(1,3)$ numărul de condiții esențiale ale centrului sunt $\omega = 3$ și respectiv 5, iar pentru $s(1,2,3)$ conform unei ipoteze $\omega \leq 13$. Însă din Teorema 1 avem că numărul de mărimi focale algebric independente pentru sistemul $s(1,2)$ nu întrece 9, pentru sistemul $s(1,3)$ nu întrece 11, iar pentru sistemul $s(1,2,3)$ nu întrece 17.

Aceste argumente, precum și faptul că sistemul $s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell)$ pe varietatea V posedă în originea de coordonate punct singular de speța a doua (centru sau focar), ne permite să înaintăm

Ipoteza generală. [18] *Dacă sistemul $s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell)$ posedă în originea de coordonate punct singular de speța a doua (centru sau focar), atunci numărul de condiții esențiale ale centrului ω pentru acest sistem nu întrece hotarul numeric de sus $2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 3$.*

Remarcă. Expresia $2\left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell\right) + 3$ exprimă numărul tuturor coeficienților membrilor din dreapta ai sistemului $s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell)$ fără unu.

6. Concluzii metodologice

Apare întrebarea: *Cum se poate explica faptul că până astăzi nu avem o soluție la Problema Centrului și Focarului pentru orice sistem $s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell)$?*

În primul rând, este evident că Problema Centrului și Focarului este una dificilă. Până în prezent nu s-au găsit metode generale de studiere a constanțelor Poincaré – Liapunov din șirul (3). În particular, nu există o strategie generală de rezolvare. Un alt obstacol ține de calculele enorme ce nu pot fi depășite nici de supercalculatoarele moderne, chiar și pentru sistemul $s(1,2,3)$, nemaivorbind de sisteme mai complicate.

Din punct de vedere psihologic, există și impedimente sub aspectul conservatismului uman de a cerceta problemele în mod tradițional, clasic. Istoria ne confirmă faptul că metodele noi, neobișnuite, cu mari dificultăți sunt aprobate și apreciate la justa lor valoare. Totuși, conform *teoremei de incompletitudine* a lui Kurt Gödel (1906–1978), de regulă, resursele create până la un moment nu sunt suficiente pentru studiile ulterioare. Prin urmare, este contestabil că succesele ulterioare depind în mare măsură de mijloacele noi create.

Rezolvarea Problemei Centrului și Focarului în aspect tradițional este echivalentă cu determinarea condițiilor esențiale ale centrului

$$L_{n_1}, L_{n_2}, \dots, L_{n_\omega} \quad (n_i \in \{1, 2, \dots, k, \dots\}; i = 1, \omega; \omega < \infty) \quad (4)$$

ce presupune *cunoașterea numărului ω* și a mulțimii $\Omega = \{n_i : i = 1, \omega\}$, finitudinea cărora rezultă din Teorema lui David Hilbert despre finitudinea bazei idealelor polinomiale. Acest fapt este similar cu teorema de finitudine a numărului lui Hilbert $H(n)$ în a doua parte a Problemei a 16-ea.

Problema determinării numărului finit ω , ori a obținerii pentru el a unui hotar numeric argumentat de sus (fie chiar în formă de ipoteză), care până în prezent nu este cunoscut pentru orice sistem $s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell)$, este importantă pentru soluționarea completă a Problemei Centrului și Focarului.

Formal Problema Centrului și Focarului constă în *determinarea condițiilor* ce asigură că punctul singular de speța a doua este un centru.

Prin contraponderi, de exemplu, *materie și antimaterie, lume și antilume*, pătrundem în esența universului, constituind *simetrii* uimitoare în lumea fenomenelor cunoscute. Din punct de vedere matematic, astfel de *simetrii* se construiesc cu ajutorul *principiului dualității*. A construi o dualitate – înseamnă a determina o corespondență dintre anumite tipuri de obiecte, la care fiecărei proprietăți a obiectului inițial îi corespunde o anumită proprietate a obiectului respectiv la această corespondență. La orice dualitate *obiectele* și *careva din proprietățile lor* au *obiecte* și *proprietăți* duale. Această metodă, care este și un *raționament prin anti-analogie*, de-

termină faptul că multe obiecte, diferite după formă și conținut, sunt construite, din punct de vedere al logicii formale, în unul și același fel. Orice dualitate dintre două teorii stabilește la un anumit nivel un izomorfism dintre aceste teorii.

Fie A și B două teorii, iar $\beta: A \rightarrow B$ o aplicație la care fiecărui obiect $a \in A$ și unor proprietăți w ale obiectelor din A pune în corespondență obiectul $\beta(a)$ și proprietatea respectivă $\beta(w)$. Se presupune că această aplicație este continuă logic în sensul: dacă obiectul a posedă proprietatea w , atunci obiectul $\beta(a)$ posedă proprietatea $\beta(w)$. Aplicația β poate fi și o simetrie pentru anumite proprietăți: proprietățile w și $\beta(w)$ sunt simetrice (duale), dacă obiectul a posedă proprietatea w numai și numai în cazul în care obiectul $\beta(a)$ posedă proprietatea $\beta(w)$. În aceste condiții, fiecărei probleme π din teoria A i se pune în corespondență o anumită problemă $\beta(\pi)$ a teoriei B . Din continuitatea logică a aplicației β obținem:

- Dacă problema π se rezolvă pozitiv, atunci și problema $\beta(\pi)$ se rezolvă pozitiv;
- Dacă problema $\beta(\pi)$ se rezolvă negativ, atunci problema π nu se rezolvă pozitiv;
- Dacă proprietățile ce figurează în problema π sunt simetrice, atunci problemele π și $\beta(\pi)$ sunt echivalente.

Vom nota că problema $\beta(\pi)$ este o formă generalizată a problemei inițiale π . Rezolvarea formelor generalizate sunt importante în cazul când pentru problema inițială, timp îndelungat, nu se găsesc soluții. Mai mult, *soluțiile problemei generalizate propun strategii și ipoteze de rezolvare a problemei inițiale*. Unele estimări din soluția problemei generalizate pot servi ca *ipoteze de lucru* pentru problema inițială.

Studiul unei probleme noi sau a unei probleme nerezolvate, aplicând metodele de rezolvare a unei probleme cunoscute se face prin diverse metode: metoda substituției variabilelor; metoda de trecere la limită etc. Ele sunt bine cunoscute din vremuri mai vechi. Cu metoda de trecere la limită, Hopf, de exemplu, a construit soluțiile ecuațiilor cvasiliniare.

Construcții uimitoare au fost propuse de V. I. Arnold în studiul punctelor critice ale funcțiilor definite pe varietăți cu ajutorul grupurilor Lie semi-simple [2].

În a doua jumătate a secolului trecut, vestitul matematician rus Victor P. Maslov a propus o nouă teorie – *Analiza Idempotentă* – bazată pe schimbarea operațiilor obișnuite $\{+, \times\}$ cu alte două operații (vezi [13, 14]). Prin această metodă excepțională s-a reușit:

- reducerea Teoriei ecuațiilor Bellman și Hamilton-Jacobi la teoria ecuațiilor liniare;
- studierea Transformărilor Fourier cu ajutorul transformărilor Legendre;
- cercetarea cu metode cunoscute a multor probleme din fizica cuantică, termodinamică, superconductibilitate etc.

Orice dualitate construită constituie un eveniment valoros pentru teoriile respective. Sunt bine cunoscute dualitățile din geometria proiectivă, dualitatea Pontryagin în teoria grupurilor abeleene locale compacte, dualismul Kolmogorov - Gelfand a spațiilor compacte și algebrilor Banach funcționale, dualitățile lui Serre și Alexander în topologie, dualitatea Radu Miron a spațiilor Cartan și spațiilor Finsler, dualitatea De Morgan în teoria mulțimilor, dualitatea Stone dintre spațiile compacte zero-dimensionale și inelele booleene, dualismul corpuscul-unde în fizica teoretică, dualismul Kramers - Wannier în fizica statistică etc.

Toate aceste exemple au o explicație simplă: multe probleme, diferite ca formă și conținut, pot fi studiate cu o unică metodă matematică și dintr-un unic punct de vedere.

Acum să fixăm două polinoame $P = P(x, y)$ și $Q = Q(x, y)$ cu părțile liniare nenule. Atunci

$$P = \sum_{i=0}^{\ell} P_{m_i}(x, y) \quad Q = \sum_{i=0}^{\ell} Q_{m_i}(x, y), \quad (11)$$

unde P_{m_i} și Q_{m_i} sunt polinoame omogene de gradul $m_i \geq 1$ în raport cu x și y , iar $m_0 = 1$. Mulțimea $1, m_1, m_2, \dots, m_{\ell}$ determină sistemul $s(1, m_1, m_2, \dots, m_{\ell})$ de tipul (2). Pentru respectivul sistem au fost construite un șir infinit de polinoame (de constante Poincaré - Liapunov) $p = \{L_k; k = 1, 2, 3, \dots\}$ de tipul (3). Fiecărei mărimi focale L_k ($k = 1, \infty$), la rândul său, i se poate pune în corespondență spații liniare finit-dimensionale de polinoame invariante (comitanți) unimodulari $S_{1, m_1, m_2, \dots, m_{\ell}}^{(d^{(k)})}$ de tipul (9), care formează un șir de tipul a . În așa mod, se construiește o corespondență dintre șirurile p de polinoame (3) și șirurile a de spații liniare de forma (9). Primul tip de șiruri formează clasa $\mathbf{P}$, iar al doilea tip de șiruri formează clasa $\mathbf{A}$. Prin urmare, am construit o corespondență $f: \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{A}$. Probabil, această corespondență este un functor (o simetrie) în careva sens. Pentru fiecare șir $p \in \mathbf{P}$ se determină numărul $E(p)$ de condiții esențiale ale centrului și mulțimea $\Omega(p) = \{n_i : i = \overline{1, \omega}\}$, iar pentru fiecare șir $a \in \mathbf{A}$ se determină numărul $gE(a)$ de mărimi focale algebric independente, adică numărul de condiții generalizat esențiale ale centrului și mulțimea respectivă $g\Omega = \{m_i : i = \overline{1, \lambda}\}$. Considerăm

că $a = f(p)$, dacă $p = \varphi(s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell), P, Q)$ și $a = \psi(s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell), P, Q)$ sunt șirurile respective determinate de sistemul $s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell)$ și polinoamele P, Q cu descompunerile respective.

Teorema 1 afirmă că $gE(a) \leq 2 \left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell \right) + 3$, dacă $a = \psi(s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell), P, Q)$. Această inegalitate și este rezolvarea Problemei Generalizate a Centrului și Focarului. Ipoteza generală presupune că și $E(p) \leq 2 \left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell \right) + 3$, pentru $p = \varphi(s(1, m_1, m_2, \dots, m_\ell), P, Q)$.

Există exemple simple pentru care are loc inegalitatea $E(p) > gE(f(p))$, dar pentru toate exemplele cunoscute $E(p) \leq 2 \left(\sum_{i=1}^{\ell} m_i + \ell \right) + 3$. Acest fapt a stat la baza lansării ipotezei generale. Probabil, adevărul despre această inegalitate se conține în proprietățile functoriale ale corespondenței f . Însă pentru rezolvarea Problemei slabe a Centrului și Focarului este suficient de construit o funcție numerică $h: N \rightarrow N$, definită pe șirul numerelor naturale N și de stabilit că $E(p) \leq h(gE(f(p)))$. În acest context, mai apare o problemă nerezolvată: de a studia, din punct de vedere generalizat, a doua parte a Problemei Centrului și Focarului, adică de a determina submulțimea $g\Omega = \{m_i : i = \overline{1, \ell}\}$ a mulțimii $\Omega = \{n_p, n_q, \dots, n_\omega\}$ de indici ai mărimilor focale algebric independente.

Să admitem că la un anumit moment Problema Centrului și Focarului este rezolvată pozitiv. În această situație, va prezenta oare interes studiul unor cazuri particulare? Considerăm că da. Fie că pentru un careva sistem $\omega = 3$ și $1000^{10000} \in \Omega$. Cine și cu ce mijloace va determina tipul punctului singular? Este bine cunoscut faptul că metoda simplex, propusă de George Dantzig în anul 1947, constituie o metodă generală de rezolvare a problemei programării liniare formulate de L. V. Kantorovich în anul 1939. Dar cercetările în acest domeniu continuă.

Prin urmare, soluția generală a problemei inițiale sau generalizate reflectă căile examinării diferitelor cazuri particulare. Mai mult, din cauza că șirul de forma (3) este infinit, soluțiile problemei inițiale și a problemei generalizate permit să *descoperim efectiv* cazuri particulare pentru care numărul ω și cele din Ω sunt accesibile pentru un studiu mai profund al proprietăților curbilor integrale de anumite tipuri. Așadar, **rolul soluțiilor generalizate este enorm** în studiul profund al diferitor clase de sisteme diferențiale (1).

Bibliografie

1. Arnold V. I., Afrajmovich, V. S.; Ilyashenko Yu. S., Shilnikov, L. P. *Bifurcation theory. Current problems in mathematics. Fundamental directions, Itogi Nauki i Tekhniki*, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 5, 1986, pp. 5–218 (B. I. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников. *Теория бифуркаций: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*. М. ВИНТИ, Т. 5, 1986, pp. 5-218).
2. Arnold V. I. *Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k, C_k and F_4 and singularities of evolutes*. Russian Mathematical Surveys 33:5 (1978), pp. 99-116 (Арнольд В. И. *Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют*. УМН, 33:5 (1978), pp. 91–105).
3. Bautin N. N. *On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from equilibrium position of focus or center type*. Math. Sb. 30(72) (1952), 181-196 (Amer. Math. Soc. Transl., 100, 1954, pp. 397-413).
4. Ciobanu M., Cojocaru S., Șubă A., Rotaru T. *Matematicianul Mihail Popa la ceas de glorie: 130 de ani de zăbucium pentru soluționarea problemei lui Poincaré*. Literatură și Artă, 1 august, 2013.
5. Ciobanu M. M., Valuță I. I. *Elemente de istorie a matematicii și matematica în Republica Moldova*. Chișinău, Tipogr. AȘM, 2006.
6. Dulac H. *Sur les cycles limits*. Bull. Soc. Math. France, 51, 1923, pp.45-188.
7. Graf V., Bothmer H. C., Kröker J. *Focal Values of Plane Cubic Centers*. Qual. Theory Dyn. Syst. 9, (2010), pp.319-324.
8. Ilyashenko Yu. *Centennial History of Hilbert's 16th problem*. Bulletin of the AMS 39(3), (2002), pp.301–354.
9. Ilyashenko Yu. *The origin of limit cycles under perturbation of the equation $dw/dz = -Rz/Rw$, where $R(z,w)$ is a polynomial*. Mathematics of the USSR Sbornik 7, (1969), pp. 353-364 (Ильяшенко Ю. С. *Возникновение предельных циклов при возмущении уравнения $dw/dz = -Rz/Rw$, где $R(z, w)$ - многочлен*, Матем. сб. 78 (1969), pp. 360-373).
10. Ilyashenko Yu., Kaloshin V. *Bifurcations of planar and spatial polycycles: Arnold's program and its development*. Fields Inst. Commun. 24 (1999), pp. 241-271.
11. Kaloshin V. *The Existential Hilbert 16-th Problem and an Estimate for Cyclicity of Elementary Polycycles*. Invent. math. 151 (2003), pp. 451-512.
12. Liapunoff A. *Problème général de la stabilité du mouvement*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Sér 2, 9, (1907), pp. 204-477. Reproduction in Annals of Mathematics Studies 17, Princeton: Princeton University Press, 1947, reprinted, Kraus Reprint Corporation, New York, 1965.
13. Litvinov G. L. *The Maslov dequantization*,

idempotent mathematics: a very brief introduction. Idempotent Mathematics and Mathematical Physics. Contemporary Mathematics, 377 (2005), pp 1-17.

14. Maslov V. P. *On a new principle of superposition for optimization problems.* Russian Mathematical Surveys 42:3, (1987), pp. 43-54. (Маслов В. П. О новом принципе суперпозиции для задач оптимизации. УМН, 42:3, (1987), pp. 39-48).

15. Mathematical Encyclopedia *Center and focus problem.* http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Centre_and_focus_problem (în rusă: http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/6088/ЦЕНТРА).

16. Poincaré H. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle.* J. Math. Pures et Appl. (Sér. 3) 7 (1881) 375-422; (Sér. 3) 8 (1882) 251-296; (Sér. 4) 1 (1885) 167-244; (Sér. 4) 2 (1886), pp. 151-217.

17. Popa M. N. *Algebraic methods for differential systems.* Editura the Flower Power, Universitatea din Pi-

tești, Seria Matematică Aplicată și Industrială, 2004, (in Romanian).

18. Popa M. N., Pricop V. V. *Applications of algebraic methods in solving the center-focus problem.* Buletinul AȘM, Matematica, 1(71), (2013), pp. 45-71.

19. Schlomiuk D. *New developments based on the mathematical legacy of C. S. Sibirschi.* Buletinul AȘM, Matematica, 1(71), (2013), pp. 3 – 10.

20. Sibirschi Ana. *O viață zbuciumată între centru și focar;* „Literatura și Arta” din 11 decembrie 2008.

21. Sibirsky K. S. *Algebraic invariants of differential equations and matrices.* Kishinev, Știința, 1976 (In Russian).

22. Vulpe N. I. *Polynomial bases of comitants of differential systems and their application in qualitative theory.* Kishinev, Știința, 1986 (in Russian).

23. Zolâdek H. *On certain generalization of the Bautin's theorem.* Nonlinearity, 7 (1994), pp. 273-279.



Iurie Platon, *Flori uscate*, u/p, 1300×1300 mm, 1992